

Disequazioni irrazionali

Una disequazione irrazionale è del tipo:

1. $\sqrt{A(x)} < B(x)$
2. $\sqrt{A(x)} > B(x)$

Vediamo come risolvere le due equazioni:

1. $\sqrt{A(x)} < B(x)$

- ✓ Dobbiamo innanzi tutto garantire che la radice esiste pertanto dobbiamo imporre che $A(x) \geq 0$;
- ✓ Essendo la radice una quantità positiva non può essere minore di una quantità negativa pertanto dovrà essere $B(x) \geq 0$

Pertanto dovremmo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ [\sqrt{A(x)}]^2 < [B(x)]^2 \end{cases}$$

2. $\sqrt{A(x)} > B(x)$

- ✓ Dobbiamo innanzi tutto garantire che la radice esiste pertanto dobbiamo imporre che $A(x) \geq 0$;
- ✓ Essendo la radice una quantità positiva sicuramente è maggiore di una quantità negativa $B(x) < 0$

Pertanto basterà risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$$

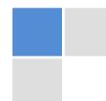
Alle soluzioni di tale sistema dobbiamo unire le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ [\sqrt{A(x)}]^2 > [B(x)]^2 \end{cases}$$

Dunque la soluzione di $\sqrt{A(x)} > B(x)$ è unione delle soluzioni dei due sistemi.



$$\left\{ \begin{array}{l} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0^2 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ [\sqrt{A(x)}]^2 > [B(x)]^2 \end{array} \right.$$



Esempio 1

Risolvere la seguente disequazione irrazionale:

$$\sqrt{x^2 - 6} > x + 2$$

Dobbiamo risolvere i seguenti sistemi:

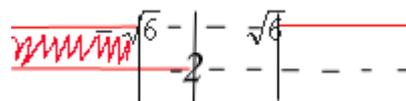
$$\begin{cases} x^2 - 6 \geq 0 \\ x + 2 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 - 6 \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\left[\sqrt{x^2 - 6} \right]^2 > [x + 2]^2$$

Risolviamo le diverse i due sistemi:

$$\begin{cases} x \leq -\sqrt{6}; x \geq \sqrt{6} \\ x < -2 \end{cases}$$

Disegniamo il grafico delle disequazioni del primo sistema:



La soluzione del primo sistema è $x \leq -\sqrt{6}$.

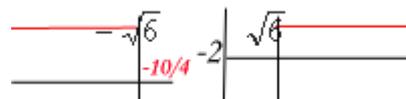
Risolviamo il secondo sistema:

$$\begin{cases} x \leq -\sqrt{6}; x \geq \sqrt{6} \\ x \geq -2 \\ x^2 - 6 > x^2 + 4x + 4 \end{cases}$$

facciamo tutti i calcoli:

$$\begin{cases} x \leq -\sqrt{6}; x \geq \sqrt{6} \\ x \geq -2 \\ 4x > -10 \end{cases} \begin{cases} x \leq -\sqrt{6}; x \geq \sqrt{6} \\ x \geq -2 \\ x > \frac{-10}{4} \end{cases}$$

Rappresentiamo graficamente le soluzioni trovate e prendiamo la parte comune:



Dal grafico si evince che non vi sono soluzioni comuni pertanto la soluzione del secondo sistema è l'insieme vuoto ϕ .

La soluzione della disequazione data è $x \leq -\sqrt{6} \cup \emptyset$ ovvero $x \leq -\sqrt{6}$.

Esempio 2

Risolvere la seguente disequazione irrazionale:

$$\sqrt{2x+55} < x-4$$

Dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x+55 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \\ [\sqrt{2x+55}]^2 < [x-4]^2 \end{cases}$$

Svolgiamo i calcoli:

$$\begin{cases} x \geq -\frac{55}{2} \\ x \geq 4 \\ 2x+55 < x^2 - 8x + 16 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} x \geq -\frac{55}{2} \\ x \geq 4 \\ x^2 - 10x - 39 > 0 \end{cases}$$

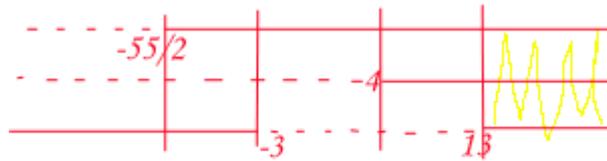
Troviamo le radici del polinomio $x^2 - 10x - 39 = 0$:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25+39}}{1} = 5 \pm 8 = \begin{cases} 13 \\ -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -\frac{55}{2} \\ x \geq 4 \\ x < -3; x > 13 \end{cases}$$

Rappresentiamo graficamente tale sistema:





La soluzione della disequazione data è quindi $x > 13$.

